

稠密网格距离场的自适应快速构造*

方向 刘钢** 鲍虎军 彭群生

浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室, 杭州 310027

摘要 针对具有大量顶点的多边形网格, 提出了一种自适应选择采样点的方法, 从而使得由这些采样点所定义的距离场方程, 以给定的精度逼近原多边形网格. 在自适应选择采样点的过程中, 需要反复求解重采样生成的距离场方程. 为了充分利用已有的求解结果, 采用矩阵分块技术, 加速了增加采样点后距离场方程的求解. 对于复杂的模型, 最终保留的采样点数目可能较多, 为此采用 FMM 方法加速了距离场场值的求解.

关键词 稠密多边形网格 距离场 自适应采样 变分插值 矩阵分块 FMM 方法

多边形网格模型由于具有简单性和一般性, 在计算机辅助设计和图形学领域中得到了广泛的应用. 随着三维扫描技术的不断发展, 具有几万、几十万甚至更多顶点数的模型已变得非常普遍. 然而, 由于稠密多边形网格模型具有数据点多且离散的特点, 其交互修改非常困难. 多分辨率编辑技术虽然能够实现一部分基于多边形网格的形状修改^[1,2], 但其对复杂模型的修改能力是有限的. 一种直接的想法是将上述离散模型转化为解析表达式, 进而对模型实现编辑处理. 目前, 解决这一问题的常用技术是分片参数曲面插值-拟合技术和隐式曲面插值-拟合技术. 前者由于具有分片的特性, 因而必须考虑采样点的分片、参数化及片与片之间的复杂光滑拼接, 导致算法的构造非常复杂, 严重影响了其广泛使用; 后者尽管显示困难, 但其构造相对简单, 并且若该解析表达式为距离场形式, 则可对模型方便地实现融合、变形、形状过渡和 Bool 运算等各种操作. 但是, 考虑到稠密多边形网格模型中多边形顶点数通常在几千甚至几万的规模, 现有的各种距离场构造方法^[3~7]都难以快速构造它们所定义的距离场.

如果注意到构造距离场的目的是使该距离场的

零等值面尽可能地逼近原稠密多边形网格表面, 那么该距离场没有必要插值所有顶点, 所以只要能够以给定的精度拟合原网格表面就可以了. 本文吸收了利用变分插值技术^[5~7]构造距离场的方法, 将其应用于稠密网格的自适应简化模型, 从而避免了该方法在散乱点数目较多时遇到的困难. 由于多边形网格模型可以方便地转化为三角形网格模型, 所以本文针对具有大量顶点的三角形网格模型给出一个自适应选择采样点的方法, 实现用尽量少的采样点插值出满足精度要求的距离场, 从而既保留了模型的原有形状又扩展了造型能力.

1 利用变分插值技术构造距离场函数

利用变分插值技术求解空间散乱点插值问题需要引入评估插值效果的能量函数, 并以能量值最小作为优化目标. 对于二维情形, 设 k 个 xy 平面上的采样点 $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ 以及各点处的高度值 $\{h_1, h_2, \dots, h_k\}$ 已知, 则插值问题可看作是求满足方程

$$f(C_i) = h_i (1 \leq i \leq k) \quad (1)$$

的标量函数 $f(x)$. 显然 $f(x)$ 有多解, 为得到惟一

2001-09-16 收稿, 2001-11-19 收修改稿

* 国家杰出青年基金(批准号: 69925204)、创新群体研究科学基金(批准号: 60021201)和教育部骨干青年教师基金资助项目

** 联系人, E-mail: gliu@cad.zju.edu.cn

1) 方向. 基于任意多面体骨架的隐式曲面造型技术研究. 浙江大学博士论文, 2001

解, 可引入薄板能量函数

$$E = \int_{\Omega} [f_{xx}^2(P) + 2f_{xy}^2(P) + f_{yy}^2(P)] dx dy \quad (2)$$

进行评估, 能量 E 本质上是函数 f 在定义域 Ω 上的一种平均曲率的估计, 其极小化使得曲面较为光滑.

上述能量泛函可方便地推广到高维情形¹⁾, 其通解形式由 Radial 基函数 $\phi(x)$ 的线性组合和一个线性项 $Q(x)$ 组成, 其一般表达式为

$$f(x) = \sum_{j=1}^k d_j \phi(x - C_j) + Q(x), \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1k} & P_{1x} & P_{1y} & P_{1z} & 1 \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2k} & P_{2x} & P_{2y} & P_{2z} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \phi_{k1} & \phi_{k2} & \cdots & \phi_{kk} & P_{kx} & P_{ky} & P_{kz} & 1 \\ P_{1x} & P_{2x} & \cdots & P_{kx} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_{1y} & P_{2y} & \cdots & P_{ky} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_{1z} & P_{2z} & \cdots & P_{kz} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_k \\ q_x \\ q_y \\ q_z \\ q_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_k \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

此方程的系数矩阵是对称半正定的, 因而有唯一的解 d_i 和 q_x, q_y, q_z, q_0 , 可直接用数值方法求解.

利用上述方法, 可以构造一个距离场函数来插值一个给定的多边形网格. 首先, 将给定的多边形网格 S 的每个顶点 P_i (顶点数为 m) 作为构造距离场的插值点, 因为这些插值点的场值均为零, 所以约束方程组最终只能得到一个所有系数都为零的退化解. 因此, 还需引入一些场值非零的采样点以保证最终的解有意义. 为此采用近似法向技术, 即对于 S 上的每个顶点 P_i , 用其相邻三角形法向的平均值作为此顶点的法向, 记做 N_i . 显然, 点 $P_i + hN_i$ 处的距离场值即为 h . 为防止点 $P_i + hN_i$ 进入到骨架 S 的内部, 通常取 h 为一较小的正值, 如 0.01. 这样, 问题就转化为: 给定顶点数为 m 的多边形网格 S , 求距离场函数 $f(P)$ ($P \in \mathbb{R}^3$) 满足方程

$$f(C_i) = h_i = \begin{cases} 0 & \text{当 } C_i = P_i \\ h & \text{当 } C_i = P_i + hN_i, \end{cases}$$

其中 d_j 为组合系数; $Q(x) = qx^T + q_0$, q_0 为常数, q 为与 x 维数相同的向量. 基函数 ϕ 的选择有多种, 常用的二维和三维基函数分别为 $\phi(x) = |x|^2 \log|x|$ 和 $\phi(x) = |x|^3$, 它们可以使能量 E 自然地达到最小, 故函数 f 的求解转化为求解如下的线性方程组

$$h_i = \sum_{j=1}^k d_j \phi(C_i - C_j) + Q(C_i), \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (4)$$

在三维情况下, 若记 $\phi_{ij} = \phi(C_i - C_j)$, 线性项未知系数为 $[q_x, q_y, q_z, q_0]$, 则上述线性方程组可表达为

$$i = 1, 2, \dots, m. \quad (6)$$

将上述约束条件代入(5)式即可得到满足约束条件的距离场函数 $f(P)$. 有了这一函数, 即可将其应用于稠密网格的简化模型, 只要选择出合适的采样点, 就可以很好的逼近原稠密网格.

2 稠密网格的自适应逼近

在利用距离场逼近稠密多边形网格模型时, 需要由原始的稠密网格生成一个简化的初始骨架网格, 并利用此初始骨架构造一个距离场, 通过逐步缩小该距离场与原始网格的偏差来达到逼近精度的要求. 为得到初始骨架网格, 文中采用基于体积保持的累进网格简化算法来生成简化模型^[8]. 该方法的优点是能自动地保持模型特征, 使得由简化模型插值得到的距离场较好地逼近原始模型; 而且通过控制简化模型的顶点数来终止简化过程(一般可控制在 100 个左右), 可使简化网格既不会过于简单,

1) Turk G, et al. Variational implicit surfaces. Tech Report GIT-GVU-99-15, Georgia Institute of Technology, May 1999

也不会因保留过多采样点而使其后的递归采样过程计算量太大。

为评价当前距离场是否满足规定的逼近要求, 必须比较该距离场与原始稠密网格的偏差. 为此, 需在原始网格上找到一些采样点, 并求出其在距离场中的场值作为评价依据. 选择采样点可以利用当前距离场定义骨架的信息. 对于定义骨架上的每个三角片, 分别找到该三角片的中心点及其三条边的中点, 求出每一点到原始稠密网格的有向距离, 然后沿距离场的梯度方向移动该点, 步长取为此距离场值, 移动方向则由距离场值的符号来确定; 移动后重新计算该点到原始网格的有向距离, 直到绝对值小于给定的跟踪误差为止, 即认为找到了该点在原始网格上的对应点. 如图 1 所示, 图中空心圆圈表示定义骨架上的点, 实心圆点则是沿距离场梯度方向上跟踪到的这些点在原始网格上的对应点, 虚线则表示当前距离场. 得到对应点后, 将其坐标代入当前距离场方程, 得到的场值就是在该点插值的偏差量. 选择其中偏差量绝对值最大的对应点, 比较该偏差量是否大于当前的逼近精度. 若大于, 则基于此对应点将当前简化网格细分. 细分可分为两种情况, 如图 2 所示, 当对应点对应三角片一边的中点时, 则取此对应点作为新增的采样点将此三角片细分为两个三角片(图 2(a)), 当对应点对应三角片的中心点时, 则此三角片被细分为 3 个三角片(图 2(b)).

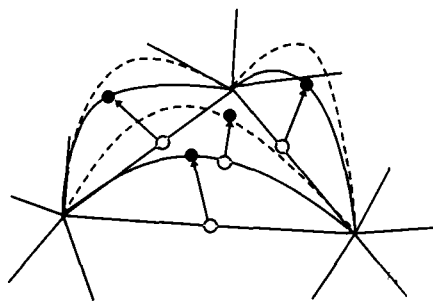


图 1 跟踪插值评估点

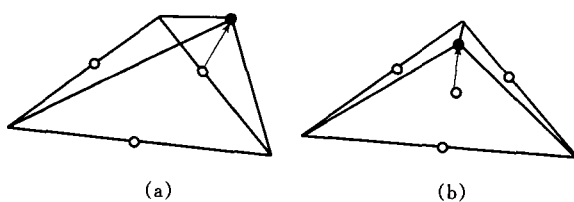


图 2 细分距离场定义网格

在遍历完当前简化网格的所有三角片后再添入

新的采样点, 并更新距离场方程, 然后再开始下一轮遍历, 直到某次遍历没有新的采样点产生为止. 因为新增加的采样点对整个距离场方程的影响是全局性的, 所以先选取偏差最大的位置增加采样点, 这样在更新距离场方程后, 有些偏差小的位置其偏差会更小甚至达到了逼近精度要求, 从而减少了最终需要的采样点数. 为此, 采用递减的方式来确定每次循环的逼近精度要求, 即先用一个较大的值作为当前的逼近精度(初始值可取目标逼近精度的 10 倍), 若插值生成的距离场方程已经满足此逼近精度, 则看当前逼近精度与最终逼近精度是否一致, 如果一致则终止上述递归过程, 否则取当前逼近精度与最终逼近精度的平均值作为新的逼近精度重复上述递归过程.

3 当前距离场方程的快速更新

在稠密网格的自适应逼近过程中, 每次增加新的采样点后, 需要更新距离场方程, 重新求解距离场方程组, 而方程组的求解过程可看作是求方程组系数矩阵的逆矩阵的过程. 此方程组的系数矩阵是非稀疏的, 不能采用快速算法, 但因为是自适应的方式逐渐增加采样点的, 所以在重新求解距离场方程时, 可以利用已有的求解结果, 采用矩阵分块技术加速距离场方程的求解. 假设已经求解了一个 k 阶距离场方程组系数矩阵的逆矩阵, 令增加采样点后的系数矩阵为 A (m 阶, $m > k$), 为了快速求解这个 m 阶系数矩阵的逆矩阵, 可将矩阵 A 分为 4 块

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

其中 A_{11} , A_{12} , A_{21} 和 A_{22} 分别为 $k \times k$, $k \times (m - k)$, $(m - k) \times k$ 和 $(m - k) \times (m - k)$ 的子矩阵. 设此系数矩阵的逆矩阵为 B , 即 $B = A^{-1}$, 同样矩阵 B 也可以相应地分为 4 块

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

$$B_{22} = -(A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} - A_{22})^{-1}; \quad (9)$$

则有 $B_{12} = -A_{11}^{-1}A_{12}B_{22}; \quad (10)$

$$B_{21} = -B_{22}B_{21}A_{11}^{-1}; \quad (11)$$

$$B_{11} = A_{11}^{-1}(E_k - A_{12}B_{21}). \quad (12)$$

分析以上各式可知,我们只需求解一个 $m-k$ 阶矩阵的逆矩阵(即(9式))就可以得到增加采样点后整个系数矩阵的逆矩阵.又因为在自适应采样过程中,采用了逐次减小逼近精度和限制每次新增采样点数的方法,从而保证了每次求解的逆矩阵的规模都在一定限度以内.表1给出了如图3所示的人头模型在不同递归次数和采样点数的条件下,分别用LU分解法和本文给出的矩阵分块方法更新距离场方程时所需的计算时间.表中数据是在限定每次最多新增20个采样点的条件下,在PⅢ600微机上的统计.结果显示,采用矩阵分块技术明显加速了距离场方程的更新计算,随着递归次数和采样点数增加,加速效果更加明显.

表1 递归采样时间统计

模型	初始采样 点数	递归次数	采样点数	LU分解 方法计算 时间/s	矩阵分块 方法计算 时间/s
人头 (图3)	34	1	43	0.251	0.130
		2	58	0.641	0.361
		3	78	1.622	0.741
		4	90	2.944	1.132
		9	180	29.543	7.180
		15	286	177.606	26.668

4 Radial基函数的近似计算

为了评估距离场逼近效果,每次加入新的采样点并更新距离场方程之后,都要重新计算在原始网格上所选取的对应点的场值.对于复杂模型,为满足较精确的逼近要求,最终保留的采样点数目可能较多,场值的计算量非常巨大.因此迫切希望找到一种快速计算场值近似值的方法.对于采用Radial基函数表示的插值距离场,可以将每个插值采样点看作是一个能量源,而某点场值的计算则可看作是该点能量值的计算.FMM(Fast Multipole Method)方法是一种快速计算由 N 个能量源共同作用的复杂系统的能量的方法,FMM方法将远离计算点的所有能量源对该点的影响用一个近似的能量源代替,从而将这些能量源对应的Radial基函数项近似合并,有效地加速了距离场值的计算.FMM方法的主要步骤如下:

(1) 构造能量源分布的树状剖分结构:首先确定出所有分布在三维空间中的能量源的包围盒,然后用八叉树剖分技术将此包围盒均匀细分到某一层

次.此剖分结构中的某个网格 C ,有如下定义:

C 的邻近网格是与 C 属于同一剖分层次且与 C 的一个角点、一条边或一个面相邻的所有网格;

C 的非邻近网格是与 C 属于同一剖分层次且不属于 C 的邻近网格;

C 的远邻近网格是属于 C 的非邻近网格而其父网格属于 C 的父网格的邻近网格.

(2) 上行近似:从上述树状剖分结构的最底层开始,对每个含有能量源的网格,将其所含能量源的作用用位于此网格中心点的一个能量源来近似;上一层网格的能量为其8个子网格的能量之和,依此类推.

(3) 下行近似:对含有需计算能量值的点的网格,从树的最顶层开始,将远邻近网格和远邻近网格之外的非邻近网格的能量作用变换到含计算点网格的中心.

(4) 近似计算:在最细的剖分层次上,将由步骤3变换得到的能量近似值与含计算点的网格及其邻近网格所包含的能量源作用得到的能量值相加,可得到计算点的近似能量值.

可见,要满足FMM算法的要求,必须提供将一个局部区域中的多个能量源聚合为该区域中一点的能量源以及将一点的能量作用近似变换到另一点的方法.Chen等用Taylor展开方法给出了基于三维矢量样条的满足上述要求的近似计算方法^[9].对于用(3)式表达的插值距离场,虽然基函数与Chen的形式有所不同,但可以将其看作是Chen方法中三维矢量场中的一维.忽略线性项的计算,对(3)式的每一项 $d_j \phi(x-C_j)$ 都可以利用Chen方法得到相应的近似计算公式及截断误差估计.值得注意的是,该算法需要许多预处理步骤,在场值计算次数不多的情况下,并不能起到加速作用,通常,只有采样点数在1000个以上而需求解距离场值的次数在10000个以上时,才能起到明显的加速效果.

5 实例和结论

我们已在PⅢ600微机上用C++语言实现了上述算法,并测试了图3所示的实例.容易看出采用自适应采样方式能够大大减少构造距离场所需的采样点数,效果令人满意,因此,所构造的距离场可以看作是原模型的一个有效的压缩表示.

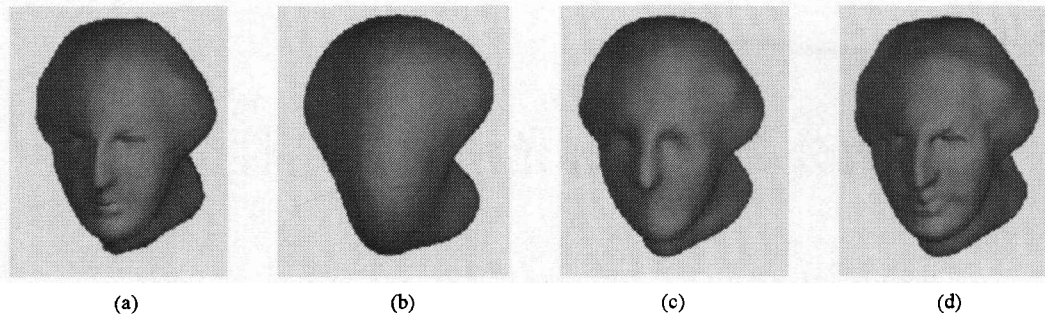


图3 自适应采样方法建立人头模型的距离场

(a) 原始模型顶点数为 681; (b)~(d) 自适应增加约束点, (b) 为 44 点, (c) 为 109 点, (d) 为 384 点

文中利用简化网格的拓扑结构来辅助新采样点的定位, 有效地减少了采样的递归次数, 但这种对初始网格的依赖性使算法不能简单地推广到对任意稠密散乱点数据的插值. 进一步的工作是寻找不需要空间拓扑结构的逼近误差判断方法和新采样点定位方法.

参 考 文 献

- 1 Kobbelt L, et al. Interactive multiresolution modeling on arbitrary meshes. In: Proceedings of SIGGRAPH'98. New York: ACM Press, 1998. 105
- 2 Lee A, et al. MAPS: Multiresolution adaptive parameterization of surfaces. In: Proceedings of SIGGRAPH'98, New York: ACM Press, 1998. 95
- 3 Muraki S. Volumetric shape description of range data using "blobby model". Computer Graphics, 1991, 25(4): 227
- 4 Bittar E, et al. Automatic reconstruction of unstructured 3D data: Combining a medial axis and implicit surfaces. Computer Graphics Forum, 1995, 14(3): 457
- 5 Turk G, et al. Shape transformation using variational implicit functions. In: Proceedings of SIGGRAPH'99, New York: ACM Press, 1999. 335
- 6 方 向, 等. 基于任意骨架的隐式曲面造型技术. 软件学报, 2000, 11(9): 1214
- 7 Fang X, et al. Continuous field based free form surface modeling and morphing. Computers & Graphics, 2001, 25(2): 235
- 8 刘新国, 等. 体积保持的多分辨率多边形网格的光顺造型. 计算机学报, 2000, 23(9): 905
- 9 Chen F, et al. Fast evaluation of vector splines in three dimensions. Computing, 1998, 61(3), 189